Семинар № 13

Тригонометри функции на остър ъгъл. Единична окръжност. Тригонометрични функции на обобщен ъгъл. Основни тригонометрични формули

Тригонометрични функции на остър ъгъл – дефиниции

В правоъгълен триъгълник един от ъглите е $90°$. Тъй като сборът от ъглите в даден произволен триъгълник е $180°$ $\Rightarrow$ другите два ъгъла в правоъгълния триъгълник са по-малки от $90°$ ($\alpha, \beta < 90°$). Ъгли, които са по-малки от $90°$ се наричат остри (ако са по-големи от $90°$ – тъпи).

Страната, разположена срещу правия ъгъл в правоъгълен триъгълник, се нарича хипотенуза (на картинката – страната AB, означена като c). Другите две страни (в случая – a и b) се наричат катети. Тригонометричните функции за остър ъгъл ($\alpha, \beta < 90°$) се дефинират по следния начин:

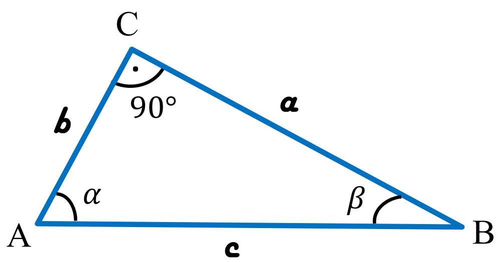
- синус (sin) на даден ъгъл – отношението на срещулежащия катет към хипотенузата
- косинус (cos) на даден ъгъл – отношението на прилежащия катет към хипотенузата
- тангенс (tg) на даден ъгъл – отношението на синус към косинус – т.е. – на срещулежащия катет към прилежащия катет
- котангенс (cotg) на даден ъгъл – единица към тангенс – т.е. отношението на прилежащия към срещулежащия катет

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \sin 90° = \frac{c}{c} = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \cos 90° = 0$$

$$\tan\alpha \equiv \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} \qquad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a}$$

$$\cot\alpha \equiv \mathrm{cotg}\,\alpha \equiv \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{cotg}\,\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{a}{b}$$



Питагорова теорема

Ако a и b са катети в правоъгълен триъгълник, а c е хипотенузата, то в сила е следното съотношение: $a^2 + b^2 = c^2$

<u>Единична окръжност. Тригонометрични функции на обобщен ъгъл</u>

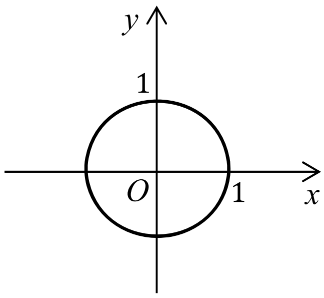
Единична (тригонометрична) окръжност се нарича окръжност с радиус единица ($r = 1$) и център, съвпадащ с центъра на координатната система (фиг. 1).

На фиг. 2 ъгъл α е ъгълът, определен от лъчите $\overrightarrow{OR}$ и $\overrightarrow{Ox}$. Нека лъч $\overrightarrow{OR}$ пресича единичната окръжност в точка P. От нея спускаме перпендикуляри към осите на координатната система - $\overrightarrow{Ox}$ и $\overrightarrow{Oy}$ и точките, в които перпендикулярите ги пресичат означаваме с точки P_x и P_y съответно (фиг. 3).

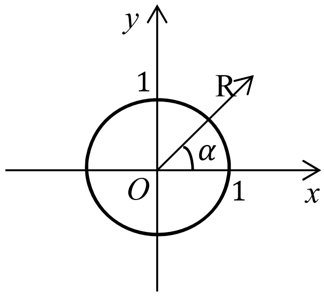
За ъгъл α можем да дефинираме тригонометричните функции по следния начин:

- косинус от ъгъла е абсцисата на точката P_x
- синус от ъгъла е ординатата точката P_y

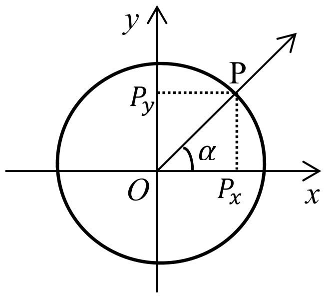
При ъгъл $\alpha + 360°$ ще имаме същите $\sin$ и $\cos$, затова функциите $\sin$ и $\cos$ са периодични с период $360° = 2\pi\ rad$.



фиг. 1



фиг. 2



фиг. 3

φ (градуси)	**$0°$**	**$30°$**	**$45°$**	**$60°$**	**$90°$**	**$180°$**	**$270°$**
φ (радиани)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\,\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\mathrm{cotg}\,\varphi$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0

<u>Основни свойства на тригонометричните функции</u>

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ $\quad$ $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\quad$ $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(90° \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$ $\quad$ $\sin(90° \pm \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(180° \pm \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\sin(180° \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$

$\cos(360° + \alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\sin(360° + \alpha) = \sin\alpha$

$-\infty \leq \mathrm{tg}\,\alpha \leq \infty$ $\quad$ $-\infty \leq \mathrm{cotg}\,\alpha \leq \infty$

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}(\alpha)$ $\quad$ $\mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}(\alpha)$

$\mathrm{tg}(90° \pm \alpha) = \mp\mathrm{cotg}(\alpha)$ $\quad$ $\mathrm{cotg}(90° \pm \alpha) = \mp\mathrm{tg}(\alpha)$

$\mathrm{tg}(180° \pm \alpha) = \pm\mathrm{tg}(\alpha)$ $\quad$ $\mathrm{cotg}(180° \pm \alpha) = \pm\mathrm{cotg}(\alpha)$

<u>Основни тригонометрични формули</u>

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- формули за sin и cos от сбор и разлика на два ъгъла

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

- формули за произведение на синуси и косинуси на различни ъгли

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

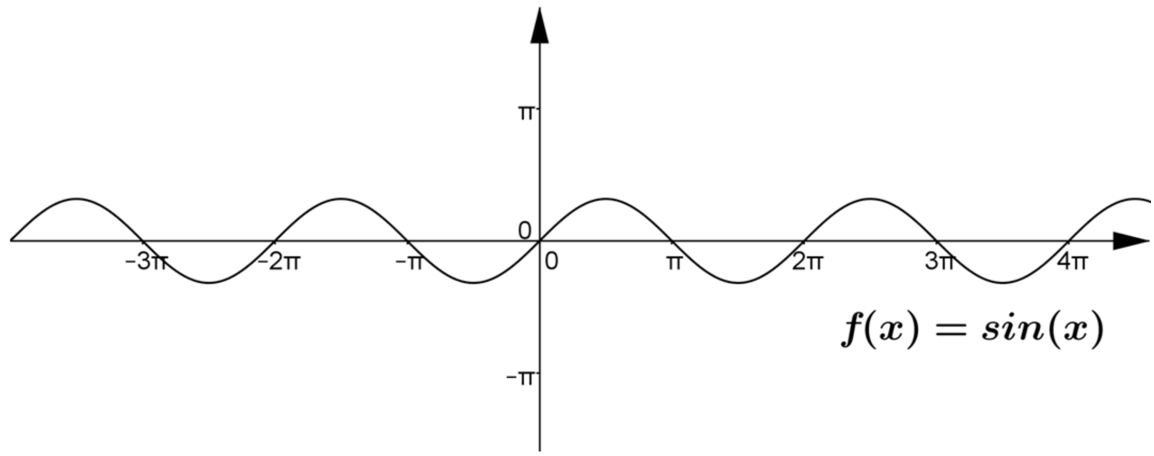
- формули за sin и cos от удвоен ъгъл

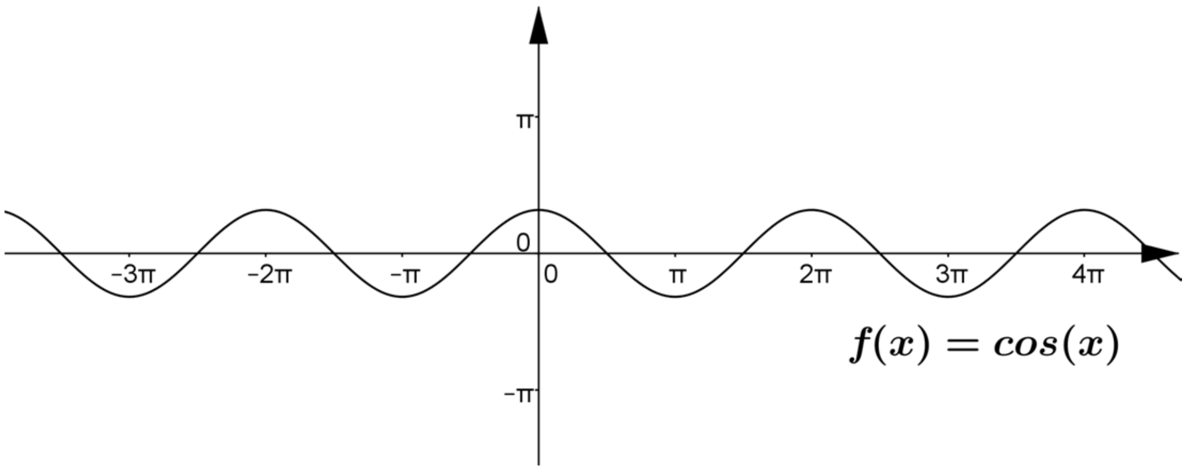
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

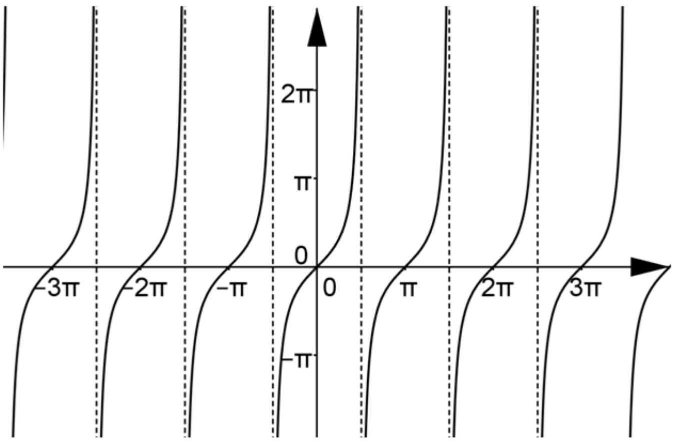
- формули за преобразуване на алгебричен сбор в произведение

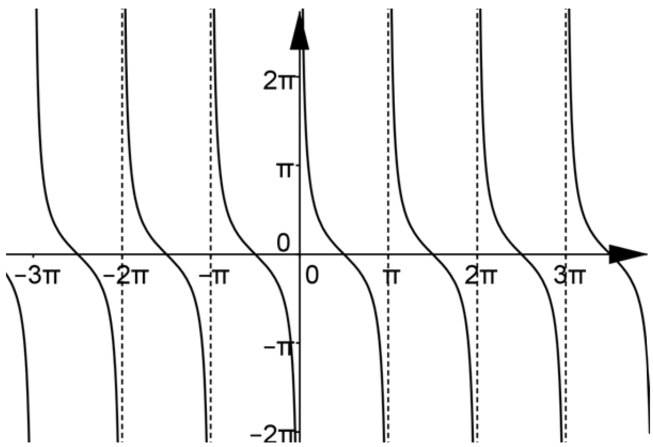
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$
$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

<u>**Графики на основните тригонометрични функции**</u>









Задача 1:

а) Намерете радианната мярка на ъгъл, градусната мярка на който е: $60°,\ \ 90°,\ \ 120°,\ \ 360°$.

б) Намерете градусната мярка на ъгъл, радианната мярка на който е: $3\pi,\ \ 1\frac{1}{2}\pi, -\pi,\ \ 3\frac{2}{3}\pi$.

Решение:

а) $\pi\ rad = 180° \ \Rightarrow\ 60° = \dfrac{\pi}{3};\ \ 90° = \dfrac{\pi}{2};\ \ 120° = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3};\ \ 360° = 2\pi$

б)$3\pi = 3.180° = 540°;\ \ \ 1\dfrac{1}{2}\pi = \dfrac{3}{2}\pi = 270°;\ \ -\pi = -180°;\ \ \ 3\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{11}{3}\pi = 660°$

Задача 2: Намерете стойностите на функциите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{cotg}\ \alpha$ за:

а) $\alpha = 135°$ б) $\alpha = 120°$ в) $\alpha = 150°$ г) $\alpha = 210°$ д) $\alpha = 270°$.

Решение:

а) $\alpha = 135° = 90° + 45°$

$$\sin(90° + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(90° + 45°) = -\sin(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \mathrm{tg}\ 135° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{2}{\sqrt{2}} = -1$$

$$\mathrm{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\ \alpha} \Rightarrow \mathrm{cotg}\ 135° = \frac{1}{-1} = -1$$

б) $\alpha = 120° = 90° + 30°$

$$\sin(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(90° + 45°) = -\sin(30°) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \mathrm{tg}\ 135° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.2 = -\sqrt{3}$$

$$\mathrm{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\ \alpha} \Rightarrow \mathrm{cotg}\ 135° = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

в) $\alpha = 150° = 90° + 60°$

$$\sin(90° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \cos(90° + 60°) = -\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \mathrm{tg}\ (90° + 60°) = -\mathrm{cotg}(60°) = -\frac{\cos(60°)}{\sin(60°)} = -\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \operatorname{cotg}150° = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

г) $\alpha = 210° = 180° + 30°$

$$\sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2} \qquad \cos(180° + 30°) = -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}210° = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{cotg}210° = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$$

д) $\alpha = 270° = 180° + 90°$

$$\sin(180° + 90°) = -\sin 90° = -1 \qquad \cos(180° + 90°) = -\cos(90°) = 0$$

$$\operatorname{tg}210° = \frac{-1}{0} = -\infty \qquad \operatorname{cotg}210° = \frac{0}{-1} = 0$$

<u>Задача 3:</u> Запишете ъгъла като $x\pi$. Определете $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{cotg}\alpha$.

а) $\alpha = 225°$ б) $\alpha = 240°$ в) $\alpha = 390°$ г) $\alpha = 540°$ д) $\alpha = 780°$.

Решение:

а) $\alpha = 225° = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \rightarrow \sin(225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos(225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1;\ \operatorname{cotg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$б) α

б) $\alpha = 240° = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \sin(240°) = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos(240°) = -\frac{1}{2};\ \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3};\ \operatorname{cotg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$= 240° = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \sin(240°) = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos(240°) = -\frac{1}{2};\ \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3};\ \operatorname{cotg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ в) $\alpha = 390° = 2\pi + \frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ в) $\alpha = 390° = 2\pi + \frac{\pi}{6}$

Тъй като тригонометричните функции са периодични с период 2π за *sin* и *cos,* и π за *tg* и *cotg*, то $\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$; $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{cotg}(\pi + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$.

$$\Rightarrow \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin(30°) = \frac{1}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg}(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \operatorname{cotg}(30°) = \sqrt{3}$$

г) $\alpha = 540° = 2\pi + \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\pi) = 0 \quad \cos(\pi) = -1 \quad \operatorname{tg}(\pi) = 0 \quad \operatorname{cotg}(\pi) =$ не е дефинирано.

д) $\alpha = 780° = 4\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \quad \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Задача 4: Намерете стойностите на тригонометричните функции:

а) $\sin\frac{\pi}{3}$ б) $\sin\frac{\pi}{4}$ в) $\sin 0°$ г) $\sin\frac{2\pi}{3}$ д) $\sin\frac{11\pi}{6}$ е) $\cos\frac{7\pi}{4}$ ж) $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{2}$

Решение:

а) $\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ в) $\sin 0° = 0$ г) $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

д) $\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin(30°) = -\frac{1}{2}$

е) $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ж) $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{2} = \mathrm{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ не е дефинирано.

Задача 5: Намерете стойността на:

а) $\sin\alpha$, ако $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha \in (270°; 360°)$.

б) $\cos\alpha$, ако $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in (180°; 270°)$.

в) $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, ако $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\alpha \in (180°; 270°)$.

г) $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, ако $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\alpha \in (90°; 180°)$.

д) $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, ако $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$ и $\alpha \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

е) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, ако $\mathrm{cotg}\,\alpha = -\frac{4}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{7\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение:

$$\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

а) $\cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{9} + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \left(\sin\alpha - \sqrt{\frac{8}{9}}\right)\left(\sin\alpha + \sqrt{\frac{8}{9}}\right) = 0$

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

По условие ъгълът се намира в IV квадрант – там стойността на $\sin x < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

б) $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5} \;\Rightarrow\; \dfrac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \cos^2\alpha = \dfrac{16}{25} \;\Rightarrow \left(\cos\alpha - \sqrt{\dfrac{16}{25}}\right)\left(\cos\alpha + \sqrt{\dfrac{16}{25}}\right) = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{4}{5}$

По условие ъгълът се намира в III квадрант – там стойността на $\cos x < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -0{,}8$.

в) $cos\,\alpha = -\dfrac{1}{3} \;\Rightarrow\; \dfrac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \cos^2\alpha = \dfrac{16}{25} \;\Rightarrow \left(\cos\alpha - \sqrt{\dfrac{16}{25}}\right)\left(\cos\alpha + \sqrt{\dfrac{16}{25}}\right) = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{4}{5}$

По условие ъгълът се намира в III квадрант – там стойността на $\cos x < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -0{,}8$.

Задача 6: Опростете изразите:

а) $\sin(\alpha - 90°)$ б) $\cos(\alpha - 180°)$ в) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$ г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

д) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$ е) $\cos\,(\alpha + \beta) + \cos\,(\alpha - \beta)$ ж) $\cos 2\alpha\,\cos\alpha + \sin 2\alpha\,\sin\alpha$

Решение:

а) $\sin(\alpha - 90°) = \sin\alpha\cos 90° - \cos\alpha\sin 90° = \sin\alpha\,.\,0 - \cos\alpha = -\cos\alpha$

б) $\cos(\alpha - 180°) = \cos\alpha\cos 180° + \sin\alpha\sin 180° = -\cos\alpha$

в) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\alpha + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\alpha + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$

д) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\left(\dfrac{(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)}{2}\right) = 2\cos\alpha\sin\beta$

е) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\left(\dfrac{(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)}{2}\right) = 2\cos\alpha\cos\beta$

ж) $\cos 2\alpha \cos\alpha + \sin 2\alpha \sin\alpha = \cos(2\alpha - \alpha) = \cos\alpha$

Задача 7: Опростете изразите:

а) $\sin(45° + \gamma) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)$ б) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) + \cos(60° - \beta)$ в) $\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

Решение:

а) $\sin(45° + \gamma) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) = 2\sin\left(\frac{45° + \gamma + 45° - \gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{45° + \gamma - 45° + \gamma}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\gamma$

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) + \cos(60° - \beta) = 2\cos\left(\frac{60° + \beta + 60° - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{60° + \beta - 60° + \beta}{2}\right) = \cos\beta$

в) $\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -2\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + \alpha + \frac{\pi}{6} - \alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + \alpha - \frac{\pi}{6} + \alpha}{2}\right) =$

$= -2\sin 0° \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = 0$

Задача 8: Пресметнете:

а) $\sin 15°$ б) $\sin 105° + \sin 15°$ в) $\cos 75° - \cos 15°$

Решение:

а) $\sin 15° = \sin(60° - 45°) = \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

б) $\sin 105° + \sin 15° = 2\sin\left(\frac{105° + 15°}{2}\right)\cos\left(\frac{105° - 15°}{2}\right) = 2\sin(60°)\cos(45°) = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

в) $\cos 75° - \cos 15° = -2\sin\left(\frac{75° + 15°}{2}\right)\sin\left(\frac{75° - 15°}{2}\right) = -2\sin 45° \sin 30° = -2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Задачи за домашна работа:

Задача 1: Намерете стойностите на функциите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{cotg}\,\alpha$ за:

а) $\alpha = 60°$ б) $\alpha = 90°$ в) $\alpha = 660°$ г) $\alpha = 840°$ д) $\alpha = 600°$.

е) $\alpha = -45°$ ж) $\alpha = -180°$ з) $\alpha = -30°$ и) $\alpha = -315°$ к) $\alpha = 720°$.

л) $\alpha = 405°$ м) $\alpha = 810°$ н) $\alpha = 495°$ о) $\alpha = -660°$ п) $\alpha = 570°$.

Задача 2: Определете знаците на:

а) $\cos 105°$ б) $\sin 105°$ в) $\mathrm{tg}313°$ г) $\mathrm{cotg}\,200°$ д) $\cos 296°$.

Задача 3: Намерете стойността на:

а) $\sin\alpha$, ако $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\alpha \in (270°; 360°)$.

б) $\cos\alpha$, ако $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha \in (180°; 270°)$.

в) $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, ако $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\alpha \in (270°; 360°)$.

г) $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$, ако $\mathrm{cotg}\,\alpha = -2$ и $\alpha \in \left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$.

д) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, ако $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\alpha \in \left(\frac{7\pi}{2}; 4\pi\right]$.

е) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, ако $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ и $\alpha \in (180°; 270°)$.

Задача 4: Опростете изразите:

а) $\sin(\alpha + 90°)$ б) $\cos(-\alpha + 180°)$ в) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ г) $\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

д) $\cos(45° + \alpha)\cos(45° - \alpha) - \sin(45° + \alpha)\sin(45° - \alpha)$

е) $\sin(\alpha - 30°) - \cos(60° - \alpha)$ ж) $\sin(\alpha - 45°) - \cos(\alpha - 45°)$