Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
*Tome 28, N° 11, 1975*

*ХИМИЯ*
*Физическая химия*

# ГИДРОДИНАМИКА ТОНКИХ ПЛЕНОК ИЗ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

**Д. Ст. Димитров, И. Б. Иванов**

(*Представлено чл.-корр. А. Шелудко 3. IV. 1975*)

Теория упругости жидких кристаллов была развита в работах Озина [1,2] и Франка [3], а механизм движения был рассмотрен Эриксеном в [4]. Аэро и Булыгиным была развита общая гидродинамическая теория нематических жидких кристаллов (НЖК) [5–9]. Целью настоящей работы является упрощение сложных общих уравнений Аэро и Булыгина для случая тонкой пленки из НЖК и их решение для одного частного случая.

Согласно [5,6] уравнения движения в отсутствии объемных сил и моментов имеют вид:

$$\text{(1а)}\quad \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=\varrho\frac{dv_i}{dt};\quad \text{(1б)}\quad \frac{\partial\mu_{ik}}{\partial x_k}-\sigma_{ps}\epsilon_{psi}=\varrho\frac{dS_i}{dt};\quad \text{(1в)}\quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0,$$

где $t$ — время, $\partial$ — плотность, $\sigma_{ik}$ и $\mu_{ik}$ — компоненты тензоров силовых и моментных напряжений ($\sigma_{ik}=\sigma^{+}_{ik}+\sigma^{-}_{\underline{ik}}+\sigma^{-}_{\smile{ik}}$; $\mu_{ik}=\mu^{+}_{ik}+\mu^{-}_{ik}$, где $+$ и $-$ обозначает соответственно упруги. и вязкие слагаемые, а $\smile$ и $\sqcup$ — символы симметризации и антисимметризации), $x_i$ — координаты, $v_i$ и $S_i$ компоненты скорости и собственного момента количества движения, а $\epsilon_{psi}$ тензор Леви-Чивита.

Предположим, что размер пленки в направлениях $x_1$ и $x_3$ равен $R$, а в направлении $x_2$ — $h$ причем $h\ll R$. Тогда к рассматриваемой системе можно применить приближение тонкого слоя, т. е. производной $\partial/\partial x_1$ данной величины можно пренебречь по сравнению с производной $\partial/\partial x_2$. С другой стороны, из (1в) имеем $v_2/v_1\sim h/R\ll 1$. Эти приближения позволяют упростить уравнения для $\sigma_{ik}$ и $\mu_{ik}$ приведенны в [7]. Подставляя полученные таким способом выражения для $\sigma_{ik}$ и $\mu_{ik}$ в (1) и снова применяя приближение тонкого слоя, в случае медленного течения, когда членами в правой части (1) можно пренебречь*, находим:

$$\text{(2а)}\qquad \frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2};\qquad \frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_2}=2\sigma_{\underline{23}};$$

$$\text{(2б)}\qquad \frac{\partial p}{\partial x_2}=0;\qquad \frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}=2\sigma_{\underline{31}};$$

* Это возможно при выполнении условий $\varrho VR/a\ll 1$ для (1а) и $\varrho\lambda^2V/ah\ll 1$ для (1б), где $V=-dh/dt$ — скорость утончения пленки, $a$ — коэффициент вязкости (анизотропия вязкости не больше 3), а $\lambda$ — длина молекулы.

(2в) $$\frac{\partial p}{\partial x_3}=\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2}; \qquad \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_2}=2\sigma_{12}.$$

Здесь $p$-давление, а

(3а) $$\sigma_{12}=\frac{1}{4}[2a_7+a_8(L_1^2+L_2^2)+a_6(L_1^2-L_2^2)]\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{1}{4}(a_6+a_8)L_1L_3\frac{\partial v_3}{\partial x_2};$$

(3б) $$\sigma_{23}=\frac{1}{4}[a_6(L_2^2-L_3^2)-2a_7-a_8(L_2^2+L_3^2)]\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{1}{4}(a_6+a_8)L_1L_3\frac{\partial v_1}{\partial x_2};$$

(3в) $$\sigma_{31}=\frac{1}{4}(a_6-a_8)L_2L_3\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{1}{4}(a_6+a_8)L_1L_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2};$$

(3г) $$\sigma_{12}=\frac{1}{4}[2(a_1+a_7)+(a_2+a_8)(L_1^2+L_2^2)+4a_3L_1^2L_2^2+$$
$$+4a_4L_1L_2+2a_6(L_1^2-L_2^2)]\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{1}{4}[(a_2+2a_6+a_8+4a_3L_2^2)L_1L_3+a_4L_1L_2]\frac{\partial v_3}{\partial x_2};$$

(3д) $$\sigma_{32}=\frac{1}{4}[2(a_1+a_7)+(a_2+a_8)(L_2^2+L_3^2)+4a_4L_2L_3+4a_3L_2^2L_3^2)+$$
$$+2a_6(L_3^2-L_2^2)]\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\frac{1}{4}[(a_2+4a_4L_2^2+2a_6+a_8)L_1L_3+4a_4L_2L_3]\frac{\partial v_1}{\partial x_2};$$

(3е) $$\mu_{12}=\left(L_2\frac{\partial L_3}{\partial x_2}-L_3\frac{\partial L_2}{\partial x_2}\right)[d_{1212}(1-L_2^2)+d_{1313}L_2^2]+\left(L_1\frac{\partial L_3}{\partial x_2}-L_3\frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right)$$
$$\times(d_{1122}+d_{1221})L_1L_2+(a_9L_1+a_{10}L_1L_2^2)\frac{\partial\psi}{\partial x_2};$$

(3ж) $$\mu_{22}=\left(L_3\frac{\partial L_1}{\partial x_2}-L_1\frac{\partial L_3}{\partial x_2}\right)[(1-L_2^2)(d_{1212}+d_{1122}+d_{1221})+d_{1313}L_2^2]$$
$$+(a_9L_2+a_{10}L_2^3)\frac{\partial\psi}{\partial x_2};$$

(3з) $$\mu_{32}=\left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial x_2}-L_2\frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right)[d_{1212}(1-L_2^2)+d_{1313}L_2^2]+\left(L_1\frac{\partial L_3}{\partial x_2}-L_3\frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right)$$
$$\times(d_{1122}+d_{1221})L_2L_3+(a_9L_3+a_{10}L_3L_2^2)\frac{\partial\psi}{\partial x_2},$$

где $a_i$ ($i=1,\ldots,10$)—коэффициенты вязкости, $L_i$ ($i=1, 2, 3$)—компоненты единичного вектора молекулярной ориентации, $d_{ikmn}$ — компоненты тензора упругих постоянных континуума направлений, а $\psi$-скорость вращения молекулы вокруг своей длиной оси. В важнейшем случае вытекания цилиндрической плоскопараллельной пленки, течение имеет цилиндрическую симетрию и поэтому можно принять, что ориентация такова, что все единичные векторы молекул пересекают ось симетрии системы. Так как в этом случае молекулы не могут вращаться вокруг своей длинной оси, в дальнейшем мы положим $\psi=0$.

Предположим, что пластинки между которыми образована пленка обработаны таким способом, что начальная ориентация молекул однородна (например — перпендикулярна плоскости пластинок). Тогда на основании (3) легко показать, что $\mu_{32}$ имеет порядок $d_{1313}\partial L_1/\partial x_2$, а $\sigma_{12}$ — $a\partial v_1/\partial x_2$ и учитывая, что согласно (1в) $\partial v_1/\partial x_2\sim\partial v_2/\partial x_1$, получаем из (2)

(4) $$\Delta L_1 \sim \frac{a}{d_{1313}} VR \ll 1.$$

Это выражение справедливо и для $\Delta L_3$. При $a = 10^{-2}$ пз, $d = 10^{-6}$ дин и $V \leq 10^{-4}$ см/сек, неравенство (4) выполняется для $R \ll 1$ см. Эта оценка позволяет положит в (3) $L_1 = L_3 = 0$ и $L_2 = 1$, причем сохраняются только $\partial L_3/\partial x_2$ и $\partial L_1/\partial x_2$. Полученные таким способом уравнения совпадают с уравнениями, к которым приводит линейная гидродинамика [7] в приближении тонкого слоя.

В случае круглой плоскопараллельной пленки из НЖК толщины $h$ и радиуса $R$, молекулы в которой в отсутствии течения ориентированы перпендикулярно к ее поверхности, при выполнении (4), уравнения (2) и (3) дают

(5) $$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu_4 \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0;$$

(6) $$d_{1313} \frac{d^2 L_r}{dz^2} + \mu_1 \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0,$$

где $r$ и $z$ — радиальная и нормальная к поверхности пленки координаты, а $\mu_1 = 1/2\ [a_1 + a_7 - a_6 + 1/2\ (a_2 + a_8)]$ — коэффициент вязкости для рассматриваемого течения [10]. Уравнения (5) и (6) при граничных условиях

$$v_r\left(+\frac{h}{2}\right) = 0;\ \left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)_{z=0} = 0;\quad v_z\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \mp\frac{V}{2};\ p(R) = p_0;\ F = \pi\int_0^R (p - p_0)\, dr^2;$$

$$L_r\left(\pm\frac{h}{2}\right) = 0$$

(здесь $p_0$ — давление в пленке в отсутствии течения, а $F$ — движущая сила) легко интегрируются;

(7а) $$V = \frac{2}{3}\frac{Fh^3}{\pi\mu_1 R^4};$$

(7б) $$L_r = \frac{2}{3}\frac{Frz}{\pi d_{1313} R^4}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right).$$

Первое из этих уравнений совпадает формально с уравнением Рейнольдса [11], откуда следует что в рассмотренном случае НЖК течет как обычная ньютоновская жидкость с коэффициентом вязкости $\mu_1$.

*Софийский университет*
*Химический факультет*
*София, Болгария*

## ЛИТЕРАТУРА

[1] C. W. Oseen. Arkiv for Matematik Astr. och. Fysik. **22A**, 1930, 1. [2] C. W. Oseen. Die anisotropen Flüssigkeiten Tatsachen und Theorien. Bd. 2 Berlin, 1920. [3] F. C. Frank. Disc. Farad. Soc. **25**, 1958, 19. [4] I. L. Ericksen. Trans. Soc. Rheol. **5**, 1961, 23. [5] Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин. Депонировано. ВИНИТИ, № 2906 — 71 от 5.05.1971. [6] Id. Прикл. мат. и мех. **35**, 1971, 5, 879. [7] Id. Физ. тверд. тела. **13**, 1971, 6, 1701. [8] Id. Прикл. механика. **8**, 1972, 3, 97. [9] Id. Уч. зап. Иванов. гос. пед. ин-т. **99**, 1972, 147. [10] M. Miesowicz. Nature. **158**, 1946, 27. [11] O. Reynolds. Phil. Trans. **177**, 1886, 157.